

Brèves communications - Kurze Mitteilungen Brevi comunicazioni - Brief Reports

Les auteurs sont seuls responsables des opinions exprimées dans ces communications. - Für die kurzen Mitteilungen ist ausschließlich der Autor verantwortlich. - Per le brevi comunicazioni è responsabile solo l'autore. - The editors do not hold themselves responsible for the opinions expressed by their correspondents.

L'oscillateur harmonique à n dimensions

Nous considérons un corpuscule de masse m se déplaçant dans un espace à n dimensions sous l'action d'une force attractive, proportionnelle au rayon vecteur et qui tend à le ramener vers l'origine des coordonnées.

Si w représente la fréquence mécanique de la théorie classique, la fonction potentielle V s'écrivant

$$(a) \quad V = 2\pi^2 m w^2 \sum_i x_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

l'équation de propagation a la forme

$$(b) \quad \Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - 2\pi^2 m w^2 \sum_i x_i^2] a = 0.$$

Posons alors, avec M. LOUIS DE BROGLIE¹

$$(c) \quad a(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_i a_i(x_i)$$

l'équation (b) se décompose en n équations du type

$$(d) \quad \frac{d^2 a_i}{dx_i^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E_i - 2\pi^2 m w^2 x_i^2] a_i = 0$$

avec $E = \sum_i E_i$.

La notation $\lambda_i = \frac{2E_i}{hw}$ et le double changement de fonction et de variable

$$(e) \quad a_i(q_i) = e^{-\frac{q_i^2}{2}} \cdot H_{k_i}(q_i); \quad x_i = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{mw}{h}\right)^{-1/2} q_i$$

transforme l'équation (d) en

$$(f) \quad \frac{d^2 H_{k_i}}{dq_i^2} - 2q_i \frac{dH_{k_i}}{dq_i} + (\lambda_i - 1) H_{k_i} = 0$$

où H_{k_i} est le polynôme de HERMITE de degré k_i .

Il devient alors aisé de passer au premier ordre

$$(g) \quad \frac{d\tau_i}{dq_i} + \tau_i^2 - 2q_i \tau_i + \lambda_i - 1 = 0;$$

tenant compte de la relation (c), nous avons

$$a = \exp. \left\{ \sum_i \left(\int \tau_i dq_i - \frac{1}{2} q_i^2 \right) \right\}$$

L'énergie E s'écrit

$$E = hw \left[\frac{n}{2} + \sum_i k_i \right]$$

ce qui montre que: pour un «oscillateur harmonique impair» (oscillateur à $2p+1$ dimensions), on obtient un énoncé de demi-quanta, alors que l'énoncé de quanta justifie «l'oscillateur harmonique pair» (oscillateur à $2p$ dimensions).

¹ LOUIS DE BROGLIE, *Théorie de la quantification dans la nouvelle mécanique* (1932).

Nous pouvons associer à (g) la théorie, déjà classique, des développantes généralisées associées à une courbe plane. Nous trouvons une famille de courbes planes à paramétrisation isométrique dont la fonction d'arc a la valeur $\sigma'_i = \lambda_i - 1 = 2k_i$.

Il est intéressant de constater que les n solutions sont obtenues en donnant n valeurs à la constante k qui intervient dans $\lambda - 1 = 2k$.

Ainsi, on peut aborder une théorie oscillatoire, telle que celle de l'oscillateur harmonique à n dimensions, à partir de notions géométriques liées à une même équation de RICCATI, la variation des niveaux d'énergie correspondant à une famille de courbes-planes (dont les plus simples sont des cercles) à paramétrisation isométrique.

Enfin, à partir de cette «chaîne de figures planes», on peut, posant

$$\tau_i - q_i = \frac{1}{V_i} \cdot \frac{\partial V_i}{\partial q_i},$$

passer aux «chaînes d'équations de DARBOUX»¹ le passage d'une forme, soit géométrique (cas des courbes isométriques), soit algébrique (cas des chaînes de DARBOUX), à la suivante se faisant suivant une loi connue.

M. GABRIEL VIGUIER

Institut Henri Poincaré, Paris, le 30 novembre 1949.

Summary

We consider a particle having a mass m . It will be shown how it is possible to gain an oscillatory theory starting from classical metric notions connected with the same RICCATI equation. Then we find the "DARBOUX chain" of the problem.

¹ G. VIGUIER, C.R. Acad. Sci. 224, 14, 6. 48 No. 26.

Ein isoperimetrisches Problem mit Nebenbedingung

Durch Einführung von Nebenbedingungen wird das bekannte isoperimetrische Problem mit der Kugel als einziger Lösung in eigenartiger Weise modifiziert. So kann beispielsweise erzwungen werden, daß bei vorgegebener Oberfläche das absolute Minimum des Volumens nicht trivial ist und das Maximum des Volumens durch einen von der Kugel verschiedenen Körper geliefert wird. Aus diesem Grunde sowie wegen des Zusammenhangs mit einem ungelösten Problem der Theorie der konvexen Rotationskörper stelle ich folgendes Problem:

«Gesucht sind die konvexen Rotationskörper von der festen Länge l , welche bei vorgegebenem Volumen V die größte Oberfläche F aufweisen».

¹ Vgl. hierzu die Dissertationen von G. HORMANN (Göttingen 1887) und W. HOWE (Berlin 1887). V und F dürfen ihre Rolle auch vertauschen.

Die Lösung lautet:

im Intervall $0 \leq V \leq \frac{\pi l^3}{36}$ besitzen Zylinder,

im Intervall $\frac{\pi l^3}{36} < V < \frac{\pi l^3}{24}$ besitzen Kegelstümpfe,

im Intervall $\frac{\pi l^3}{24} \leq V < \infty$ besitzen Kegel

die verlangte Eigenschaft. Die Extremalkörper sind durch Vorgabe von V eindeutig bestimmt.

Beweis. Bekanntlich bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man nur konvexe Rotationskörper betrachtet, die aus lauter Kegelstümpfen aufgebaut sind. Die Meridiankurve jedes derartigen Körpers ist einfach ein Streckenzug, der durch Rotation um die X -Achse den Körper erzeugt. Wir teilen die Gesamtheit der Kegelstümpfe in zwei Klassen ein. In der Klasse I

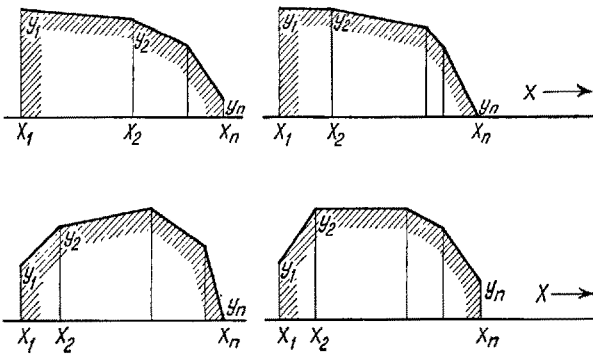


Abb. 1.

ist die Folge der Radien y_1, y_2, \dots, y_n , monoton abnehmend oder doch monoton nicht zunehmend. Bei Zugehörigkeit zur Klasse II fällt diese Beschränkung weg, und man hat nur die Konvexitätsbedingung zu beachten. Zunächst kann elementar gezeigt werden, daß kein Körper aus II bei festem Volumen größte Oberfläche besitzt¹. Aus Platzersparnisgründen muß dieser Teilbeweis weggelassen werden.

Die Klasse I unterteilen wir weiter nach der Anzahl der Kegelstümpfe. Es ist nun durchaus natürlich, zuerst die Unterklasse I₁, also die Klasse der *eigentlichen Kegelstümpfe, Kegel und Zylinder* ins Auge zu fassen. In der Tat gelingt es leicht, die eingangs angeführten Resultate bei dieser Beschränkung zu gewinnen, namentlich wenn man neue Parameter einführt (Abb. 2).

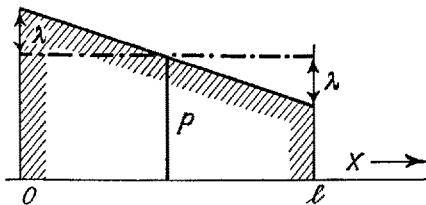


Abb. 2.

$$V = \frac{\pi l}{3} (3p^2 + \lambda^2)$$

$$F = 2\pi (p^2 + \lambda^2 + p\sqrt{l^2 + 4\lambda^2}) \quad (1)$$

$$(0 \leq p < \infty; 0 \leq |\lambda| \leq p).$$

¹ Der Beweis führt über Doppelkegelstümpfe mit gleichen Endradien, Doppelkegelstümpfe mit verschiedenen Endradien zum allgemeinen Kegelstumpförper.

In einer (F, V) -Ebene lautet die Gleichung der Zylinderkurve ($|\lambda| = 0$):

$$l^2 F^2 - 4l \cdot FV + 4V^2 - 4\pi l^3 \cdot V = 0, \quad (2)$$

die Gleichung der Kegelkurve ($|\lambda| = p$)

$$l^2 F^2 - 6l \cdot FV - 3\pi l^3 \cdot V = 0 \quad (3)$$

oder aufgelöst

$$V = \frac{l \cdot F^2}{3(\pi l^2 + 2F)}. \quad (4)$$

Setzt man (4) in (2) ein, so ist leicht ersichtlich, daß die beiden Kurven rechts vom Nullpunkt genau einen Schnittpunkt mit den Koordinaten

$$F^* = \pi l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}; \quad V^* = \pi l^3 \frac{(2-\sqrt{3})}{8} \quad (5)$$

aufweisen. Ferner verläuft die Kegelkurve im Intervall $0 < V < V^*$ oberhalb, im Intervall $V^* < V < \infty$ unterhalb der Zylinderkurve. Zwecks Gewinnung der Enveloppe der zweiparametrischen Kurvenschar (1) ist der Ausdruck

$$\frac{\partial V}{\partial p} \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{\partial V}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} \text{ zu diskutieren.} \quad (6)$$

Die Nullstellen sind

(a) $\lambda = 0$ (Zylinderkurve, geometrischer Ort von Kurvenenden).

(b) $p = \frac{\sqrt{l^2 + 4\lambda^2}}{6}; \quad \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{36p^2 - l^2}$ (7)

$$0 \leq |\lambda| \leq p; \quad \frac{l}{6} \leq p \leq \frac{l}{4\sqrt{2}}. \quad (8)$$

Mit Hilfe von (7) gewinnt man durch einsetzen und Elimination

$$V = \frac{l}{48} (6F - l^2\pi), \quad (9)$$

und es stellt sich heraus, daß die Enveloppe das Stück der gemeinsamen Tangente von (2) und (3) zwischen den beiden Berührungspunkten

$$A \left(\frac{7\pi}{18} \cdot l^2, \frac{\pi}{36} \cdot l^3 \right); \quad B \left(\frac{\pi}{2} \cdot l^2, \frac{\pi}{24} \cdot l^3 \right) \text{ ist}^1. \quad (10)$$

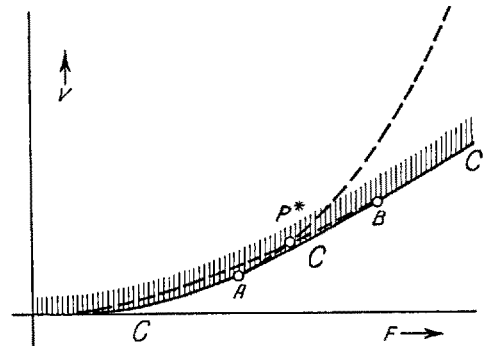


Abb. 3

¹ Der Kegelstumpf, dessen Bildpunkt senkrecht unter P^* auf der Enveloppe liegt, besitzt die Koordinaten

$$F^{**} = \pi l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}; \quad V^{**} = \pi l^3 \frac{(3\sqrt{3}-2)}{96}.$$

Sein Volumen ist um ca. 0,6% kleiner als V^* !

(1) vermittelt eine Abbildung der (p, λ) -Ebene auf die (F, V) -Ebene. Einem bekannten Abbildungssatz gemäß¹ darf behauptet werden, daß die Abb. 1 keinen Bildpunkt liefert, der unterhalb des Kurvenzuges C liegt (Abb. 3).

Der Bildrand C , aus einem Parabelbogen, einer Strecke und einem Hyperbelbogen bestehend, ist als Ganzes *nach unten nicht konkav*. Dank dieses günstigen Umstandes ist es möglich, den Beweis zu Ende zu führen.

Einen beliebigen Doppelkegelstumpf aus I betten wir in eine einparametrische Schar von ebensolchen Körpern mit x als Parameter ein. Man berechnet (Abb. 4):

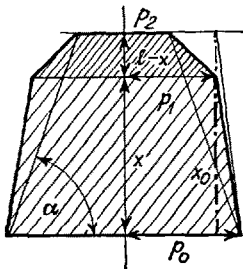


Abb. 4.

$$V = \frac{\pi x}{3} (p_0^2 + p_0 p_1 - p_1 p_2 - p_2^2) + \frac{\pi l}{3} (p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2) \quad (11)$$

$$F = \pi \left[p_0^2 + p_2^2 + (p_0 + p_1) \sqrt{(p_0 - p_1)^2 + x^2} + (p_1 + p_2) \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (l-x)^2} \right] \quad (12)$$

$$x_0 = \frac{l(p_0 - p_1)}{p_0}; \quad x_1 = l \quad (13)$$

$$\frac{dV}{dF} = \frac{1}{3} \left(\frac{p_0^2 + p_0 p_1 - p_1 p_2 - p_2^2}{N(x)} \right) \quad (14)$$

$$N(x) = \frac{(p_0 + p_1)x}{\sqrt{(p_0 - p_1)^2 + x^2}} - \frac{(p_1 + p_2)(l-x)}{\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (l-x)^2}} \quad (15)$$

$$\frac{dN}{dx} = \left\{ \frac{(p_0 + p_1)(p_0 - p_1)^2}{(\sqrt{(p_0 - p_1)^2 + x^2})^3} + \frac{(p_1 + p_2)(p_1 - p_2)^2}{(\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (l-x)^2})^3} \right\} > 0 \quad (16)$$

Die betrachtete Kurve, mit einer positiven Steigung beginnend, ist also im ganzen Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ konkav nach unten. Da nun ihre Endpunkte als Bildpunkte von Kegelstümpfen *nicht unterhalb von C liegen*, so liegt der Bildpunkt des Doppelkegels als innerer Kurvenpunkt *sogar oberhalb von C*.

Die angewendete Deformation ist immer möglich und somit kann kein Doppelkegelstumpf extremal sein².

Der nächste Schritt besteht in der sinngemäßen Anwendung des Verfahrens auf den dreifachen Kegelstumpf, wobei der unterste Stumpf unangetastet bleibt. Genau wie oben kann festgestellt werden, daß auch in der Klasse I_3 kein Extremum möglich ist.

Das Verfahren ist aber von allgemeiner Tragweite. Wir approximieren irgendeinen Kegelstumpfkörper

durch eine innere Folge von lauter Körpern aus I mit $F_1(i) < F_2(i) < F_3(i) < \dots < F$; $V_1(i) < V_2(i) < \dots < V$ sowie durch eine äußere Folge von gleichartigen Körpern mit

$$F_1(a) > F_2(a) > \dots > F; \quad V_1(a) > V_2(a) > \dots > V^*.$$

Beide Körperfolgen liefern Bildpunkte, die ganz oberhalb C liegen. Wegen der Konkavität jeder Verbindungskurve muß dann der Bildpunkt des Ausgangskörpers oberhalb von C liegen. Damit ist der Beweis fertig. Unsere Behauptungen lassen sich auch in Ungleichungen ausdrücken. Für konvexe Rotationskörper von der festen Länge l gilt folgendes System von Ungleichungen:

$$(1) \quad V \geq \frac{l}{2} [(F + \pi l^2) - l \sqrt{2\pi F + \pi^2 l^2}];$$

$$0 \leq F \leq \frac{7\pi}{18} \cdot l^2 \quad \text{Gleichheitszeichen nur für Zylinder}$$

$$0 \leq p \leq \frac{l}{6}$$

$$(2) \quad V \geq \frac{l}{48} (6F - l^2 \pi);$$

$$\frac{7\pi}{18} \cdot l^2 < F < \frac{\pi}{2} \cdot l^2 \quad \text{Gleichheitszeichen nur für Kegelstümpfe}$$

$$\frac{l}{6} < p < \frac{l}{4\sqrt{2}}; \quad \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{36p^2 - l^2}$$

$$(3) \quad V \geq \frac{l \cdot F^2}{3(\pi l^2 + 2F)};$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot l^2 \leq F < \infty \quad \text{Gleichheitszeichen nur für Kegel}$$

$$\frac{l}{4\sqrt{2}} \leq p < \infty.$$

Bern, den 15. Februar 1950.

H. BIERI

Summary

The class of convex rotatory bodies with fixed length l is considered and it is shown that for

$$0 \leq V \leq \frac{\pi l^3}{36} \quad \text{cylinders,}$$

$$\frac{\pi l^3}{36} < V < \frac{\pi l^3}{24} \quad \text{truncated cones,}$$

$$\frac{\pi l^3}{24} \leq V < \infty \quad \text{cones}$$

with pre-determined volume possess the greatest surface. The demonstration is given with the aid of discussions of curves.

* Sind ∞ -viele Schritte nötig, so liegt eine Schachtelfolge vor.

Das Raman-Spektrum des Azobenzols

Wir arbeiten seit einiger Zeit über die Erregung von Raman-Spektren durch die gelbe He-Linie 5875,6 Å. Die zu überwindenden Schwierigkeiten waren: 1. die Konstruktion hochbelastbarer He-Lampen in einer lichtstarken Raman-Anordnung (Streuungsfaktor $\left(\frac{\nu(\text{Hg } 4358)}{\nu(\text{He } 5876)}\right)^4 = 3,3$); 2. die Erzielung eines sehr reinen Heliums, da sich infolge des hohen Ionisationspotentials des He schon schwache Verunreinigungen sehr störend bemerkbar machen; 3. die weitmöglichste Unterdrückung des Molekülspektrums des He₂, das in dem hier interessierenden Bereich einige störende Banden aufweist.

¹ H. BIERI, Diss. (Bern 1941).

² Der Zylinder natürlich bleibt von dieser Deformation unberührt.